# Ejercicios del libro “Calculo con Geométrica Analítica Segunda Edición Autor Earl W. Swokowski” - Cap. 15

## 15.1 Definiciones y curvas en el espacio

Instrucciones: Resolver ejercicios 1–20 múltiplo de 2. Para cada curva se identifica su ecuación en coordenadas, su tipo (recta, circunferencia, parábola, hipérbola, elipse), y se justifican las transformaciones algebraicas usadas.

### Ejercicio 2 — enunciado

r(t) = (1 - t^2) i + t j, t ≥ 0

Desarrollo:

1. Desarrollo: Escribimos x=1-t^2, y=t. Sustituimos t = y, obteniendo x = 1 - y^2.
2. Interpretación geométrica: relación entre x e y equivale a una parábola en el plano xy con eje paralelo a x, vértice en (1,0).
3. Como t ≥ 0, tomamos la rama con y ≥ 0 (semiparábola).

Resultado final: Resultado: La curva es la semiparábola x = 1 - y^2, y ≥ 0; vértice (1,0).

### Ejercicio 4 — enunciado

r(t) = (2 + cos t) i - (3 - sin t) j, 0 ≤ t ≤ 2π

Desarrollo:

1. Desarrollo: x = 2 + cos t, y = -3 + sin t.
2. Calcule (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = cos^2 t + sin^2 t = 1.
3. Conclusión: ecuación de una circunferencia de radio 1 y centro (2,-3).

Resultado final: Resultado: Circunferencia de radio 1 con centro en (2,-3).

### Ejercicio 6 — enunciado

r(t) = 2 cosh t i + 3 sinh t j, t ∈ R

Desarrollo:

1. Desarrollo: x = 2 cosh t, z? (aquí solo i y j) => analizar relación entre x y y.
2. Calcule (x/2)^2 - (y/3)^2 = cosh^2 t - sinh^2 t = 1.
3. Conclusión: hipérbola con ejes escalados, ecuación (x/2)^2 - (y/3)^2 = 1.

Resultado final: Resultado: Hipérbola (x/2)^2 - (y/3)^2 = 1.

### Ejercicio 8 — enunciado

r(t) = tan t i + sec t j + 2 k, -π/2 < t < π/2

Desarrollo:

1. Desarrollo: x = tan t, y = sec t ⇒ sec^2 t - tan^2 t = 1 ⇒ y^2 - x^2 = 1.
2. La componente k = 2 indica que la curva está en el plano z = 2.
3. Por dominio -π/2 < t < π/2 se toma la rama con sec t > 0.

Resultado final: Resultado: Hipérbola y^2 - x^2 = 1 en el plano z = 2, con y > 0.

### Ejercicio 10 — enunciado

r(t) = t^3 i + t^2 j + t k, 0 ≤ t ≤ 4

Desarrollo:

1. Desarrollo: x = t^3, y = t^2. Relación entre x e y: x = (y)^{3/2} con signo según t.
2. Interpretación: curva espacial de tipo cúbica; proyección en xy es parábola transformada en relación implícita.
3. Se indican puntos: t=0 → (0,0,0), t=1 → (1,1,1), etc.

Resultado final: Resultado: Curva cúbica espacial. Proyección en xy cumple x = y^{3/2} para y ≥ 0.

### Ejercicio 12 — enunciado

r(t) = 6 sin t i + 4 j + 25 cos t k, -2π ≤ t ≤ 2π

Desarrollo:

1. Desarrollo: x = 6 sin t, z = 25 cos t. Calcule (x/6)^2 + (z/25)^2 = sin^2 t + cos^2 t = 1.
2. La componente y = 4 fija plano paralelo al plano xz.
3. Conclusión: elipse en el plano y = 4 con semiejes 6 y 25.

Resultado final: Resultado: Elipse en y = 4 con ejes de longitud 12 y 50 (semiejes 6 y 25).

### Ejercicio 14 — enunciado

r(t) = t i + 2t j + e^{t} k, t ∈ R

Desarrollo:

1. Desarrollo: x = t, y = 2t, z = e^t. Proyección en xy es recta con relación y = 2x.
2. En z la función crece exponencialmente; la curva es una curva espacial que sube rápidamente.
3. No hay conica simple; se describe parametrizada.

Resultado final: Resultado: Curva espacial con proyección recta y = 2x y componente vertical exponencial.

### Ejercicio 16 (longitud) — enunciado

x = t^2, y = t sin t, z = t cos t, 0 ≤ t ≤ 1

Desarrollo:

1. Desarrollo paso a paso:
2. 1) Calcular derivadas: x' = 2t; y' = sin t + t cos t; z' = cos t - t sin t.
3. 2) Calcular |r'(t)|^2 = (2t)^2 + (sin t + t cos t)^2 + (cos t - t sin t)^2.
4. 3) Expandir y simplificar: observe que (sin+t cos)^2+(cos - t sin)^2 = 1 + t^2.
5. 4) Por tanto |r'| = sqrt(4t^2 + 1 + t^2) = sqrt(1 + 5t^2).
6. 5) Integrar L = ∫\_0^1 sqrt(1+5t^2) dt. Usar sustitución hiperbólica u = sqrt(5) t o fórmula cerrada.
7. 6) Resultado expresado en funciones hiperbólicas inversas.

Resultado final: Resultado: L = (1/2)√6 + (1/(2√5)) asinh(√5).

### Ejercicio 18 (longitud) — enunciado

x = 2t, y = 4 sin 3t, z = 4 cos 3t, 0 ≤ t ≤ 2π

Desarrollo:

1. Desarrollo: derivadas: x' = 2, y' = 12 cos 3t, z' = -12 sin 3t.
2. Calcular |r'|^2 = 4 + 144(cos^2 3t + sin^2 3t) = 4 + 144 = 148.
3. Así |r'| = 2 sqrt(37), constante. Integrar L = ∫\_0^{2π} 2 sqrt(37) dt = 4π sqrt(37).

Resultado final: Resultado: L = 4π√37.

### Ejercicio 20 (longitud) — enunciado

x = 1 - 2t^2, y = 4t, z = 3 + 2t^2, 0 ≤ t ≤ 2

Desarrollo:

1. Desarrollo: derivadas: x' = -4t, y' = 4, z' = 4t.
2. Calcule |r'|^2 = 16t^2 + 16 + 16t^2 = 32t^2 + 16 = 16(2t^2+1).
3. |r'| = 4 sqrt(2t^2+1). Integrar L = 4 ∫\_0^2 sqrt(2t^2+1) dt.
4. Resolver integral por sustitución trig o hiperbólica para obtener resultado exacto.

Resultado final: Resultado: L = 12 + √2 asinh(2√2).

## 15.2 Límites, derivadas e integrales

Instrucciones: ejercicios 1–20 múltiplos de 2; 17–20; 27–30. Para cada ejercicio se indica dominio, derivadas, segundas derivadas, trazas y solución de integrales vectoriales.

### Ejercicio 2 — enunciado

r(t) = 1/t i + sin(3t) j

Desarrollo:

1. Dominio: t ∈ R \ {0} (porque 1/t no definida en 0).
2. r'(t) = <-1/t^2, 3 cos(3t)>.
3. r''(t) = <2/t^3, -9 sin(3t)>.
4. Continuidad: continua en su dominio.

Resultado final: Resultado: Dominio R\{0}, r' y r'' como arriba.

### Ejercicio 4 — enunciado

r(t) = e^{2t} i + arcsin(t) j

Desarrollo:

1. Dominio: arcsin(t) requiere -1 ≤ t ≤ 1 → dominio [-1,1].
2. r'(t) = <2 e^{2t}, 1/√(1-t^2)>.
3. r''(t) = <4 e^{2t}, t(1-t^2)^{-3/2}>.

Resultado final: Resultado: Dominio [-1,1], derivadas indicadas.

### Ejercicio 6 — enunciado

r(t) = e^{2t} i + e^{-4t} j, t = 0

Desarrollo:

1. r'(t) = <2 e^{2t}, -4 e^{-4t}> → r'(0) = <2, -4>.
2. r''(t) = <4 e^{2t}, 16 e^{-4t}> → r''(0) = <4, 16>.

Resultado final: Resultado: r'(0)=<2,-4>, r''(0)=<4,16>.

### Ejercicio 8 — enunciado

r(t) = 2 sec t i + 3 tan t j, t = π/4

Desarrollo:

1. r'(t) = <2 sec t tan t, 3 sec^2 t> → r'(π/4) = <2√2, 6>.
2. r''(t) calcular por derivación de productos → r''(π/4) = <6√2, 12>.

Resultado final: Resultado: r'(π/4)=<2√2,6>, r''(π/4)=<6√2,12>.

### Ejercicio 10 — enunciado

r(t) = t^2 i + t^3 j, t = -1

Desarrollo:

1. r'(t) = <2t, 3t^2> → r'(-1) = <-2, 3>.
2. r''(t) = <2, 6t> → r''(-1) = <2, -6>.

Resultado final: Resultado: r'(-1)=<-2,3>, r''(-1)=<2,-6>.

### Ejercicio 12 — enunciado

r(t) = 5 i + t^3 j, t = 2

Desarrollo:

1. r'(t) = <0, 3t^2> → r'(2) = <0, 12>.
2. r''(t) = <0, 6t> → r''(2) = <0, 12>.

Resultado final: Resultado: r'(2)=<0,12>, r''(2)=<0,12>.

### Ejercicio 14 — enunciado

r(t) = √t i + 1/t j + e^{-t} k

Desarrollo:

1. Dominio: t > 0.
2. r'(t) = <1/(2√t), -1/t^2, -e^{-t}>.
3. r''(t) = <-1/(4 t^{3/2}), 2/t^3, e^{-t}>.

Resultado final: Resultado: Dominio (0,∞), derivadas indicadas.

### Ejercicio 16 — enunciado

r(t) = ln(1-t) i + sin t j + t^2 k

Desarrollo:

1. Dominio: 1 - t > 0 → t < 1 ⇒ dominio (-∞,1).
2. r'(t) = <-1/(1-t), cos t, 2t>.
3. r''(t) = <1/(1-t)^2, -sin t, 2>.

Resultado final: Resultado: Dominio (-∞,1), derivadas indicadas.

### Ejercicio 17 — enunciado

x = 2 t^3 - 1, y = -5 t^2 + 3, z = 8 t + 2; P(1,-2,10)

Desarrollo:

1. Encontrar t0: z = 8 t + 2 = 10 ⇒ t0 = 1.
2. Calcular r'(t) = <6t^2, -10t, 8> ⇒ r'(1) = <6,-10,8>.
3. Ecuación recta tangente: R(s) = P + s r'(1).

Resultado final: Resultado: R(s) = <1,-2,10> + s<6,-10,8>.

### Ejercicio 18 — enunciado

x = 4 √t, y = t^2 - 10, z = 4/t; P(8,6,1)

Desarrollo:

1. Resolver t: 4 √t = 8 ⇒ √t = 2 ⇒ t = 4.
2. r'(t) = <2/√t, 2t, -4/t^2> ⇒ r'(4) = <1, 8, -1/4>.
3. Recta tangente: R(s) = <8,6,1> + s<1,8,-1/4>.

Resultado final: Resultado: R(s) = <8,6,1> + s<1,8,-1/4>.

### Ejercicio 19 — enunciado

x = e^t, y = t e^t, z = t^2 + 4; P(1,0,4)

Desarrollo:

1. Encontrar t0: e^{t0} = 1 ⇒ t0 = 0.
2. r'(t) = <e^t, (1+t)e^t, 2t> ⇒ r'(0) = <1,1,0>.
3. Recta: R(s) = <1,0,4> + s<1,1,0>.

Resultado final: Resultado: R(s) = <1,0,4> + s<1,1,0>.

### Ejercicio 20 — enunciado

x = t sin t, y = t cos t, z = -t; P(π/2,0,π/2)

Desarrollo:

1. Determinar t0: z = -t0 = π/2 ⇒ t0 = -π/2.
2. r'(t) = <sin t + t cos t, cos t - t sin t, -1> ⇒ r'(-π/2) = <-1, -π/2, -1>.
3. Recta: R(s) = <π/2, 0, π/2> + s<-1, -π/2, -1>.

Resultado final: Resultado: R(s) = <π/2,0,π/2> + s<-1,-π/2,-1>.

### Ejercicio 27 — enunciado

Integrar ∫\_0^2 (6 t^2 i - 4 t j + 3 k) dt

Desarrollo:

1. Integración componente a componente:
2. ∫\_0^2 6 t^2 dt = 6 [t^3/3]\_0^2 = 6\*(8/3) = 16.
3. ∫\_0^2 -4 t dt = -4 [t^2/2]\_0^2 = -4\*(2) = -8.
4. ∫\_0^2 3 dt = 3 [t]\_0^2 = 6.

Resultado final: Resultado vectorial: 16 i - 8 j + 6 k.

### Ejercicio 28 — enunciado

Integrar ∫\_{-1}^1 (-5 t i + 8 t^3 j - 3 t^2 k) dt

Desarrollo:

1. Observación de paridad: integrandos impares o pares.
2. ∫\_{-1}^1 -5 t dt = 0 (función impar).
3. ∫\_{-1}^1 8 t^3 dt = 0 (impar).
4. ∫\_{-1}^1 -3 t^2 dt = -3 [t^3/3]\_{-1}^1 = -2.

Resultado final: Resultado: -2 k.

### Ejercicio 29 — enunciado

Integrar ∫\_0^{π/4} (sin t i - cos t j + tan t k) dt

Desarrollo:

1. Integrar: ∫ sin t dt = -cos t; ∫ -cos t dt = -sin t; ∫ tan t dt = -ln cos t.
2. Evaluar en los límites 0 a π/4:
3. i: (-cos(π/4) + cos 0) = ( -√2/2 + 1 ) = 1 - √2/2.
4. j: (-sin(π/4) + sin 0) with sign → -√2/2.
5. k: -ln cos t | = -ln(√2/2) = ln(√2).

Resultado final: Resultado: (1-√2/2) i - √2/2 j + ln(√2) k.

### Ejercicio 30 — enunciado

Integrar ∫\_0^1 [ t e^{t^2} i + √t j + (t^2+1)^{-1} k ] dt

Desarrollo:

1. i: usar sustitución u = t^2 ⇒ du = 2t dt ⇒ ∫\_0^1 t e^{t^2} dt = (1/2)(e^{t^2})|\_0^1 = (e-1)/2.
2. j: ∫\_0^1 √t dt = ∫\_0^1 t^{1/2} dt = [2/3 t^{3/2}]\_0^1 = 2/3.
3. k: ∫\_0^1 (t^2+1)^{-1} dt = arctan t |\_0^1 = π/4.

Resultado final: Resultado: ((e-1)/2) i + (2/3) j + (π/4) k.

## 15.3 El movimiento

Instrucciones: ejercicios 1–16 múltiplo de 2. Para cada caso se calcula velocidad, aceleración y rapidez (norma de la velocidad).

### Ejercicio 2 — enunciado

r(t) = (4 - 9 t^2) i + 3 t j, t = 1

Desarrollo:

1. Calcular v = r'(t) = <-18 t, 3> ⇒ v(1) = <-18, 3>.
2. Calcular a = r''(t) = <-18, 0>.
3. Rapidez = ||v|| = sqrt((-18)^2 + 3^2) = 3 sqrt(37).

Resultado final: Resultado: v(1)=<-18,3>, a(1)=<-18,0>, rapidez=3√37.

### Ejercicio 4 — enunciado

r(t) = √t i + (1 + √t) j, t = 4

Desarrollo:

1. v = <1/(2√t), 1/(2√t)> ⇒ v(4) = <1/4, 1/4>.
2. a = <-1/(4 t^{3/2}), -1/(4 t^{3/2})> ⇒ a(4) = <-1/32, -1/32>.
3. Rapidez = sqrt((1/4)^2 + (1/4)^2) = 1/(2√2).

Resultado final: Resultado: v(4)=<1/4,1/4>, a(4)=<-1/32,-1/32>, rapidez=1/(2√2).

### Ejercicio 6 — enunciado

r(t) = cos^2 t i + 2 sin t j, t = 3π/4

Desarrollo:

1. v = <-2 sin t cos t, 2 cos t> ⇒ v(3π/4) = <1, -√2>.
2. a = <-2 cos 2t, -2 sin t> ⇒ a(3π/4) = <0, -√2>.
3. Rapidez = sqrt(1 + 2) = √3.

Resultado final: Resultado: v=<1,-√2>, a=<0,-√2>, rapidez=√3.

### Ejercicio 8 — enunciado

r(t) = 2 t i + e^{-t^2} j, t = 1

Desarrollo:

1. v = <2, -2 t e^{-t^2}> ⇒ v(1) = <2, -2 e^{-1}>.
2. a = <0, (-2 + 4 t^2) e^{-t^2}> ⇒ a(1) = <0, 2 e^{-1}>.
3. Rapidez = 2 sqrt(1 + e^{-2}).

Resultado final: Resultado: v=<2,-2 e^{-1}>, a=<0,2 e^{-1}>, rapidez=2√(1+e^{-2}).

### Ejercicio 10 — enunciado

r(t) = t^2 i + t^3 j + t k

Desarrollo:

1. v = <2t, 3t^2, 1>, a = <2, 6t, 0>.
2. Evaluaciones: t=0 ⇒ v=(0,0,1), a=(2,0,0), rapidez=1.
3. t=1 ⇒ v=(2,3,1), rapidez=√14.
4. t=2 ⇒ v=(4,12,1), rapidez=√161.

Resultado final: Resultado: ver cuerpo del desarrollo.

### Ejercicio 12 — enunciado

r(t) = 4 sin t i + 2 t j + 9 cos t k

Desarrollo:

1. v = <4 cos t, 2, -9 sin t>, a = <-4 sin t, 0, -9 cos t>.
2. t=0 ⇒ v=(4,2,0), rapidez=2√5. t=π/2 ⇒ v=(0,2,-9), rapidez=√85.

Resultado final: Resultado: ver cuerpo del desarrollo.

### Ejercicio 14 — enunciado

r(t) = t (cos t i + sin t j + k)

Desarrollo:

1. v = <cos t - t sin t, sin t + t cos t, 1>.
2. a = <-2 sin t - t cos t, 2 cos t - t sin t, 0>.
3. Rapidez = sqrt(2 + t^2).

Resultado final: Resultado: v y a como arriba; rapidez = √(2 + t^2).

### Ejercicio 16 — enunciado

r(t) = 2 t i + j + 9 t^2 k

Desarrollo:

1. v = <2, 0, 18 t>, a = <0, 0, 18>.
2. t=0 ⇒ rapidez = 2; t=1 ⇒ rapidez = 2√82; t=2 ⇒ rapidez = 10√13.

Resultado final: Resultado: ver cuerpo del desarrollo.